长安大学2020–2021学年第二学期
《计算方法》试题(B)卷参考答案

一、解：LU分解为

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&1&0&0\\4&2&1&0\\7&6&3&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}3&4&5&8\\0&2&7&4\\0&0&1&1\\0&0&0&5\end{bmatrix}.$$

$$Ly=b\Rightarrow y=[-4\quad 1\quad 0\quad -5]^T;\quad Ux=y\Rightarrow x=[1\quad -1\quad 1\quad -1]^T.$$

二、解：拉格朗日插值多项式为

$$L_2(x)=\sum_{i=0}^{2}l_i(x)f(x_i),\quad l_0(x)=\frac{(x-1.5)(x-2)}{(1-1.5)(1-2)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(1.5-1)(1.5-2)},\quad l_2(x)=\frac{(x-1)(x-1.5)}{(2-1)(2-1.5)},\quad L_2(1.8)=0.973884$$

$$R_2(x)=f^{(3)}(\xi)(x-1)(x-1.5)(x-2)/6$$

$$|R_2(x)|\le\sqrt{3}(cos1)/216=0.00433255113523$$

三、解：令$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{cx}+\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}=c_0\frac{1}{x}+c_1+c_2x=c_0\phi_0(x)+c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)$，且有如下函数值表

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$g(x_i)$	5.81395	3.09598	2.06612	1.44928	1.000	0.63331

最小二乘曲线拟合的法方程组为

$$\text{即}\begin{bmatrix}149.139&24.5&6\\24.5&6&2.1\\6&2.1&0.91\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}87.185172\\14.058632\\3.280123\end{bmatrix}$$

解得：$c_0=0.503375,c_1=0.976071,c_2=-1.9669$

进而有参数：$c=1.98659,a=1.93905,b=-3.907422$

四、解：

（1）$|R_S[f]|=\frac{b-a}{2880}h^4|f^{(4)}(\eta)|\leq\frac{sin1}{2880n^4}\leq 0.5*10^{-4}, n\geq 1.55478, \therefore n=2$，应至少取5个节点.

（2）$f=h/6*[f(0)+4f(1/4)+2f(1/2)+4f(3/4)+f(1)]\approx 0.4597$

五、解：

- 令$f(x)=xe^x-1$，当$x>0$时，$f(x)$单调递增，$f(0)=-1<0, f(1)=e-1>0$，取隔根区间为$[0,1]$.
- 当$x\in[0,1]$时，$f'(x)=e^x(x+1)>0, f''(x)=e^x(x+2)>0$，故可用牛顿法求方程的根.
- 取$x_0=1$，迭代公式为$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ (k=0,1,2,\cdots)$进行迭代得$x^*\approx 0.56714$.

六、证明：令$f(x)=x^m$，则基于节点$\{x_i\}_{i=0}^n$的n次拉格朗日插值多项式为$L_n(x)=\sum\limits_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)=\sum\limits_{i=0}^n x_i^m l_i(x)$，当$m\leq n$时，$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)=0$，所以$f(x)=L_n(x)$，结论成立.

七、解：基于节点$\{x_i\}_{i=0}^{k+1}$采用牛顿插值法插值有$f(x)=N_{k+1}(x)$，比较等式可得：

- 当$p\leq k$时，$f[x_0,x_1,\cdots,x_p]=0$
- 当$p=k+1$时，$f[x_0,x_1,\cdots,x_p]=1$

当$p>k+1$时，利用导数和差商关系可得$f[x_0,x_1,\cdots,x_p]=0$.

八、证明：

（1）雅克比迭代法迭代矩阵为 $B_J=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & -1/2\\ -1 & 0 & -1\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{bmatrix}$,$|\lambda I-B_J|=\lambda^3+\frac{5}{4}\lambda, B_J$的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\pm i\frac{\sqrt{5}}{2}$，故 $\rho(B_J)=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$，雅克比法不是对任意初始向量都收敛.

（2）高斯-赛德尔迭代法 $B_{G-S}=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & -1/2\end{bmatrix}$，$|\lambda I-B_{G-S}|=\lambda\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2$，$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}$，$\rho(B_{G-S})=\frac{1}{2}<1$，高斯-赛德尔迭代法对任意初始向量均收敛.