长安大学2020–2021学年第二学期
《计算方法》试题(A)卷参考答案

一、填空题（每空4分，计28分）

1、$\underline{\ 1\ }$

2、$\underline{A}$的各阶顺序主子式不为零

3、$\underline{\ 1\ }$、$\underline{\ 0\ }$

4、$\underline{\ b-a\ }$

5、$\underline{\sqrt{15+\sqrt{221}}}$ 或5.465、$\underline{\ 21\ }$

二、解答题（每题12分，计72分）

1、解：LU分解为

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&1&0&0\\4&2&1&0\\7&6&3&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}3&4&5&8\\0&2&7&4\\0&0&1&1\\0&0&0&5\end{bmatrix}.$$

$$Ly=b\Rightarrow y=[-4\quad 1\quad 0\quad -5]^T;\quad Ux=y\Rightarrow x=[1\quad -1\quad 1\quad -1]^T.$$

2、解：拉格朗日插值多项式为

$$L_2(x)=\sum_{i=0}^{2}l_i(x)f(x_i),\quad l_0(x)=\frac{(x-1.5)(x-2)}{(1-1.5)(1-2)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(1.5-1)(1.5-2)},\quad l_2(x)=\frac{(x-1)(x-1.5)}{(2-1)(2-1.5)},\quad L_2(1.8)=0.973884$$

$$R_2(x)=f^{(3)}(\xi)(x-1)(x-1.5)(x-2)/6$$

$$|R_2(x)|\le\sqrt{3}(cos1)/216=0.00433255113523$$

3、解：设$\phi_0(x)=1,\quad \phi_1(x)=x,\quad \phi_2(x)=x^2,\quad \phi(x)=a+bx+cx^2$，则正则方程组为

$$\begin{bmatrix}(\phi_0,\phi_0)&(\phi_0,\phi_1)&(\phi_0,\phi_2)\\(\phi_1,\phi_0)&(\phi_1,\phi_1)&(\phi_1,\phi_2)\\(\phi_2,\phi_0)&(\phi_2,\phi_1)&(\phi_2,\phi_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\phi_0,y)\\(\phi_1,y)\\(\phi_2,y)\end{bmatrix}$$

$$\text{即}\begin{bmatrix}5 & 0 & 10\\ 0 & 10 & 0\\ 10 & 0 & 34\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\text{解得：}\phi(x)=\frac{58}{35}-\frac{3}{7}x^2\approx 1.65714-0.42857x^2.$$

4、解：

（1）$|R_S[f]|=\frac{b-a}{2880}h^4|f^{(4)}(\eta)|\leq\frac{sin1}{2880n^4}\leq 0.5*10^{-4}, n\geq 1.55478, \therefore n=2$，应至少取5个节点.

（2）$f=h/6*[f(0)+4f(1/4)+2f(1/2)+4f(3/4)+f(1)]\approx 0.4597$

5、解：

- 令$f(x)=xe^x-1$，当$x>0$时，$f(x)$单调递增，$f(0)=-1<0, f(1)=e-1>0$，取隔根区间为$[0,1]$.
- 当$x\in[0,1]$时，$f'(x)=e^x(x+1)>0, f''(x)=e^x(x+2)>0$，故可用牛顿法求方程的根.
- 取$x_0=1$，迭代公式为$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ (k=0,1,2,\cdots)$进行迭代得$x^*\approx 0.56714$.

6、证明：

（1）雅克比迭代法迭代矩阵为 $B_J=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & -1/2\\ -1 & 0 & -1\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{bmatrix}, |\lambda I-B_J|=\lambda^3+\frac{5}{4}\lambda, B_J$的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\pm i\frac{\sqrt{5}}{2}$，故 $\rho\left(B_J\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$，雅克比法不是对任意初始向量都收敛.

（2）高斯-赛德尔迭代法 $B_{G-S}=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & -1/2\end{bmatrix}$，$|\lambda I-B_{G-S}|=\lambda\big(\lambda+\frac{1}{2}\big)^2$，$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}$，$\rho\left(B_{G-S}\right)=\frac{1}{2}<1$，高斯-赛德尔迭代法对任意初始向量均收敛.