北京邮电大学 2024—2025 学年第二学期

《数学建模与模拟》期末考试试题

说明：1）本次考试采用开卷方式，答卷时间为一周（2025 年 06 月 02 日 2025 年 06 月 09 日），请按时（2025 年 06 月 09 日数学模型课课间，逾时不候）交卷；2）本课程的考试是一学期课程学习结束的一次综合复习，因此在答题时务必独立完成，除了查阅有关资料外，请避免同学间相互抄袭，如发现雷同答卷，一并作废！3）答题纸务必采用校发专用答题纸。请在答卷卷首写清姓名、班级、学号（学校统一 10 位编号）等。4）凡涉及计算编程的题目，将程序打包、压缩、以 “数学模型”＋“本人学号”＋“姓名”命名后，发到教学云平台（云邮教学平台）“选课班级”期末考试作业处。

- **特别，如果你在试题解答过程中得到了 AI 工具的帮助，请在相应题目的解答过程中就其具体回应做出适宜地论述。**

一、综合建模——双层玻璃窗的优化设计（30 分）

请参阅课件“双层玻璃窗的功效 http://10.161.29.25/sxjm/lec/Course02/course02_2.htm，该模型说到底只是双层玻璃窗的保温“功效”一个论证，谈不上是“双层玻璃窗的设计”模型。“双层玻璃窗的优化设计”除了要考虑窗体材料（玻璃、空气等介质）外，事实上还要考虑房间各个墙面的隔热效应及其外缘常态温度、不同材质与内外温差对应的墙体的表面积构成等，特别在具体建模分析过程当中，模型构建与求解讨论务必要和模型假设契合（或曰不能有过度离谱的背离）。

就以我们目前上课的教室 N-111 教室为例，物业计划对该房间作重新装修，请你对窗户装修提出设计方案，不妨就从冬季保暖的角度，尝试给出优化设计模型。

二、模型解释（40 分）

1. 请结合课程学习中的一些典型案例，论述“最优化思想是数学建模的灵魂”的内涵，并谈谈你就此的个人体会。

2. 以已知某双种群生态系统的数学模型$\begin{cases}\dot{x}_1 = r_1\cdot x_1\cdot(1-x_1/N_1+\sigma_1\cdot x_2/N_2)\\ \dot{x}_2 = r_2\cdot x_2\cdot(1+\sigma_2\cdot x_1/N_1-x_2/N_2)\end{cases}$，其中以$x_1(t)$、$x_2(t)$表示两个不同种群在时刻$t$的数量，$r_i$、$N_i$、$\sigma_i(>0, i=1,2)$为模型参数。请问该模型表示哪类生态（共存、竞争、捕食）系统模型，并说明平衡点$\left(\frac{1+\sigma_1}{1-\sigma_1\cdot\sigma_2}\cdot N_1，\frac{1+\sigma_2}{1-\sigma_1\cdot\sigma_2}\cdot N_2\right)$的稳定性条件。

3．关于“席位的公平分配问题”，一个理想的算法应该满足对每一个团体其最终分得的席位数应介于基于比例核算的席位数（通常为一分数）的上下取整两个数中择“1”，同时考虑总席位数可调，每个团体的席位应关于总席位数单调递增（不减）。这样的方法存在，请以规范表达方式构造一个满足上述要求的算法，同时联系实际给出一个与总席位数确定相关的优化决策模型。

4. **$\boldsymbol{n}$人合作对策问题**

记$I=\{1,2\cdots n\}$，$2^I=\{s|s\subseteq I\}$为I的幂集合，$v: 2^I\to R$为2^I到实数集的一个函数，v是$\boldsymbol{n}$人合作对策问题的某个**特征函数**，若以$\varphi(v)=\left(\varphi_1(v),\varphi_2(v)\cdots\varphi_n(v)\right)^T$表示$\boldsymbol{n}$人合作对策问题关于特征函数$v$的算法，以下是著名的$Shaply$值方法：

$$\begin{cases}\varphi_i(v)=\sum_{i\in s\subseteq I} w(|s|)\cdot[v(s)-v(s\backslash\{i\})](i=1..n)\\ w(|s|)=[(n-|s|)!\cdot(|s|-1)!]/n!\end{cases}$$

这里，$|s|$表示集合s中元素数目：

1）试用排列组合的观点解释$w(|s|)$的意义；

2）试着解释$Shaply$值方法的合理性及其局限性（不足）。

5．考虑实物交换问题，我们假定讨论甲、乙双方，限于 A、B 两种物品；以(x,y)、(u,v)分别表示甲方、乙方拥有 A、B 两种物品的量，以$f(x,y)$、$g(u,v)$分别表示甲方、乙方相应的满意程度，称之为满意度函数。 进而建立如下模型：

$$Max \qquad Min\{\frac{f(x,y)}{f(x_0,y_0)},\frac{g(u,v)}{g(u_0,v_0)}\}$$

$$s.t.\quad \begin{cases} x+u=x_0+u, \qquad y+v=y_0+v_0\\ f(x,y)\ge f(x_0,y_0),\quad g(u,v)\ge g(u_0,v_0)\\ x,y,u,v\ge 0\end{cases}$$

尝试解释包括模型参数x_0,y_0,u_0,v_0在内，目标约束、各组约束条件的具体意义；论述该模型的合理性以及可能的不同目标函数选择。

三、计算与论证（30 分）

1．下面是某项特殊试验的观测数据，你可以选择适当的工具观测其特点，并给出适当的数据拟合结果（拟合函数）：

{{-3.49168,0.0006},{-3.09553,0.0013},{-2.69937,0.0046},{-2.30322,0.0127},{-1.90707,0.0283},{-1.51091,0.0551},{-1.11476,0.0832},{-0.718608,0.1237},{-0.322455,0.1455},{0.0736986,0.1596},{0.469852,0.1323},{0.866005,0.1107},{1.26216,0.0729},{1.65831,0.041},{2.05446,0.0181},{2.45062,0.0072},{2.84677,0.0028},{3.24292,0.0002},{3.63908,0.0001},{4.03523,0.0001}}

2．核武器竞赛（http://10.161.29.25/sxjm/lec/Course06/course06_1.htm）

如参考课件，在适当的模型假设下，若要采用期望值准则分析建模，即每一方均希望在遭到对方倾泻性核打击后，保留下核弹数目的数学期望值不少于某个设定值，则得定解条件(参数、变量的符号均保持课件原样)：

$$x\cdot p_1^y\ge x_0、y\cdot p_2^x\ge y_0$$

得到甲、乙双方的安全曲线分别为： $f(y)=x_0\cdot p_1^{-y}$、$g(x)=y_0\cdot p_2^{-x}$。

联系实际，我们觉得对模型假设所表述的国家安全概念的适宜解读，应当是，“每一方均希望在遭到对方倾斜性核打击后，保留下核弹数目不少于某个设定值的概率不少于某个概率设定值，比方 0.9”。进而，相应的定解条件变为：

$$\sum_{k=x_0}^{x} C_x^k\cdot p_1^{k\cdot y}\cdot(1-p_1^y)^{(x-k)}\ge 0.9、\sum_{k=y_0}^{y} C_y^k\cdot p_2^{k\cdot x}\cdot(1-p_2^x)^{(y-k)}\ge 0.9$$

这里，将x、y解读为自然数。

请尝试推论甲乙双方的无差别曲线以及双方安全区域的存在性（当然，你也可以采用类似计算机模拟等数值的、近似的一些手法对模型展开讨论）。

3． 在 97 年前后，我国的一些大中城市出现了产品的分销热。安利公司是美国一家主要生产清洁产品的大公司，在许多国家开设分公司，据说“分销”是安利产品的主要销售方式，产品的“分

销员”从公司代理处提取产品并直接送到顾客手中，公司从产品的销售收入中让利作为“分销员”的报酬。显然一个大而好的“分销网络”对公司是重要的，公司鼓励“分销员”一方面挖掘产品的潜在消费群，一方面不断地壮大“分销网络”本身—即不断地吸引新的成员加入并给予指导，而公司同样依据由“你”发展起来“分销网络”的销售业绩给予适当的报酬。

假设你O与你相关的一个人群$I = \{1,2 \cdots n\}$合作从事某项经营活动，整体效益表现为I中每一成员的成绩x_i之和$s = \sum_{i=1}^{n} x_i$，而O的所有工作是帮助I中每个成员取得尽可能大的成绩， 即O的成绩需要根据$x_i(i = 1,2 \cdots n)$做出综合评定，不妨将之设计为$x = (x_1, x_2 \cdots x_n)^T$的一个函数：

$$O = f(x_1, x_2 \cdots x_n)$$

定性分析f应满足：1）非负性：$0 \le f(x_1, x_2 \cdots x_n) \le s$；2）单调性：$\frac{\partial f}{\partial x_i} \ge 0 (i = 1..n)$；

3） 对称性：对任意$x = (x_1, x_2 \cdots x_n)^T$、$y = (y_1, y_2 \cdots y_n)^T$，若经有限次对换可将$(x_1, x_2 \cdots x_n)^T$化为$(y_1, y_2 \cdots y_n)^T$，即存在 $I = \{1,2 \cdots n\}$ 上的一全排列$i_1, i_2 \cdots i_n$满足：$x_k = y_{i_k} (k = 1..n)$， 则有$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = f(y_1, y_2 \cdots y_n)$；4）无考性：若$x = (x_1, x_2 \cdots x_n)^T$中有$n-1$个分量为$\mathbf{0}$，则$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = 0.$

为简化起见， 只须设计两个一元函数$\alpha(t)$、$f^*(t)$即可，要求 a）非负性：$0 \le \alpha(t) \le 1$、$0 \le f^*(t) \le t$；b）单调性：$\frac{d\alpha(t)}{dt} \ge 0$、$\frac{df^*(t)}{dt} \ge 0$；c）无考性：$\alpha(0) = 0.$

令$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(s - x_i) \cdot f^*(x_i)$，**试着证明：由满足条件 a，b，c 的$\alpha(t)$、$f^*(t)$定义的$f(x_1, x_2 \cdots x_n)$满足条件 1）~4)；**

若将$x = (x_1, x_2 \cdots x_n)^T$、$O$表示收入，试解释$\alpha(s - x_i)$、$f^*(x_i)$的经济意义，并阐明构造$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(s - x_i) \cdot f^*(x_i)$的合理性.